

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

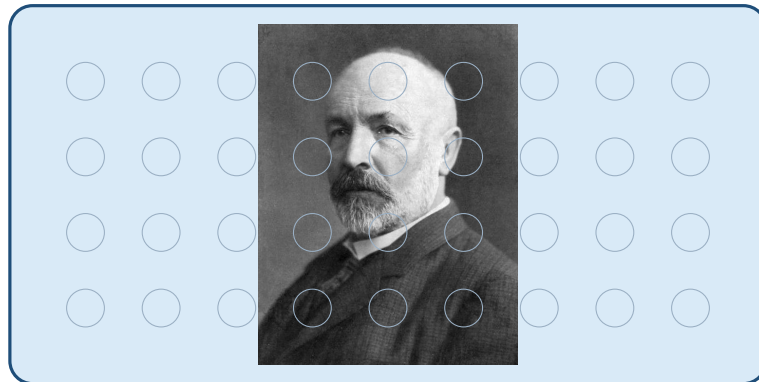
[illegible]

**Pode ser correcta unha conclusión... e,
ao mesmo tempo, trastornar a nosa lóxica?**

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O conxunto de Cantor



? O paradoxo

É posible eliminar case todo... e que sigan quedando infinitos puntos?

O conxunto de Cantor constrúese eliminando unha e outra vez o terzo central dos intervalos que van quedando. Con cada paso desaparecen máis partes do segmento. Ao rematar o proceso, a lonxitude restante é nula... pero aínda quedan infinitos puntos.

A idea matemática

O conxunto de Cantor mostra que **ter lonxitude cero non significa estar baleiro**.

É posible construír un conxunto con infinitos puntos e, ao mesmo tempo, con lonxitude cero.

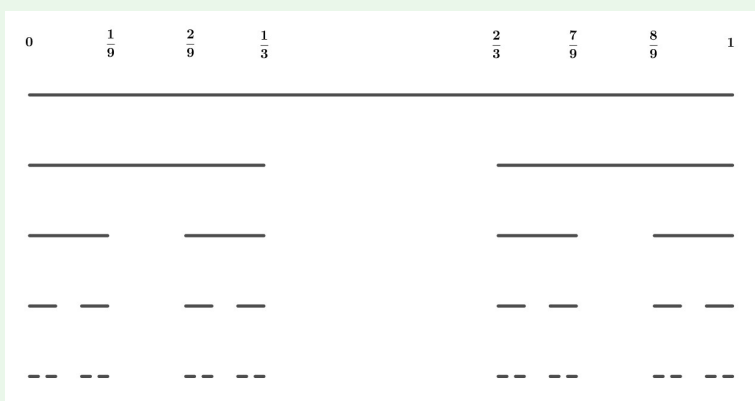
Ao realizar esta construción, o segmento inicial queda reducido á mínima expresión, pero os extremos dos intervalos eliminados nunca desaparecen.

* A construción

Partimos do intervalo $[0, 1]$.

- Eliminamos o seu terzo central.
- Repetimos o mesmo cos dous segmentos restantes.
- **Repetimos o proceso indefinidamente.**

En cada paso elimínase un terzo da lonxitude que quedaba, polo que a lonxitude total evoluciona así:



+ Para saber máis

O matemático **Georg Cantor** (1845 – 1918) presentou este conxunto en **1883**.

Moitos anos despois comprobouse que o conxunto de Cantor é un dos exemplos máis famosos da **xeometría fractal**: ao ampliar calquera das súas partes aparece unha estrutura semellante á do conxunto completo.

É unha clara mostra de que o infinito pode dar lugar a obxectos xeométricos tan fermosos como inesperados.



! A explicación

Despois de eliminar tantos intervalos, parece que non debería quedar practicamente nada.

E, en certo sentido, é así: o conxunto ten medida nula, é dicir, a súa lonxitude é cero.

As lonxitudes dos segmentos en cada paso forman a sucesión $\{1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots\}$: unha progresión xeométrica que mostra que **a lonxitude do conxunto se achega cada vez máis a cero**.

Pero, como os extremos nunca se eliminan e o proceso continúa, **sempre hai infinitos puntos**.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Cantor2.jpg

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

A falacia da acusación



? A falacia

Unha proba incriminatoria... demostra realmente a culpabilidade?

Cometeuse un crime.

Hai 10 000 persoas que poderían ser culpables.

Na escena atopáronse restos minerais que só poden proceder dunha determinada mina.

A policía detén unha persoa e comproba que tamén leva eses restos na roupa.

Que probabilidade hai de que sexa culpable?

* Ponte a proba

Dos 10 000 habitantes da cidade

■ 200 traballan na mina e

■ 9800 non traballan nela.

Só unha persoa cometeu o crime.

Se a persoa detida ten restos da mina na roupa... **cal das seguintes afirmacións cres que é correcta?**

- Hai un 99,5 % de posibilidades de que sexa culpable.
- Hai un 99,5 % de posibilidades de que sexa inocente.

! A explicación

Os restos minerais son compatibles coa culpabilidade... pero tamén coa inocencia. Das 200 persoas que poderían presentar eses restos na roupa,

- 1 é culpable e
- 199 son inocentes.

A evidencia dos restos minerais parece moi incriminatoria, pero a probabilidade relevante non é

$$P(\text{restos/inocente}) = \frac{199}{9999} \approx 0,02 = 2\%,$$

senón

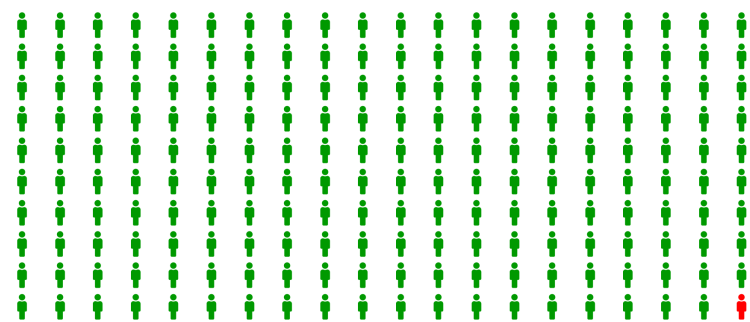
$$P(\text{inocente/restos}) = \frac{199}{200} = 0,995 = 99,5\%.$$

A falacia aparece ao confundir a probabilidade de observar a proba se a persoa é inocente, coa probabilidade de que sexa inocente unha vez coñecida a proba.

A idea matemática

A falacia da acusación ou do fiscal consiste en **confundir dúas probabilidades condicionadas distintas**, algo que pode conducir a conclusións completamente erróneas.

PERSOAS CON RESTOS MINERAIS NA ROUPA



199 INOCENTES

1 CULPABLE

PROBABILIDADE EQUIVOCADA

Probabilidade de atopar restos minerais nunha persoa inocente.

$$P(\text{restos/inocente})$$

É pequena ($\approx 2\%$).

PROBABILIDADE CORRECTA

Probabilidade de que a persoa sexa inocente, dado que ten eses restos.

$$P(\text{inocente/restos})$$

É moi alta ($\approx 99,5\%$).

≠
NON É
O MESMO

+ Para saber máis

Esta falacia apareceu en diversos procesos xudiciais famosos.

Un dos máis coñecidos foi o de **Sally Clark**, condenada inicialmente pola morte dos seus dous fillos nun proceso no que se presentaron e interpretaron incorrectamente datos probabilísticos. A sentenza foi anulada un tempo despois, tras pasar máis de tres anos no cárcere.

Hoxe este erro estúdase en **estatística, medicina, criminoloxía e dereito** como un exemplo clásico da importancia de interpretar correctamente as probabilidades.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe superior: <https://www.inference.org.uk/sallyclark/scw366.gif>

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O fenómeno Will Rogers



? O fenómeno

Como pode aumentar a media de dous grupos ao mesmo tempo?

Á primeira vista parece imposible: se unha persoa abandona un grupo para incorporarse a outro, o máis lóxico sería pensar que un dos dous grupos sairá prexudicado. Porén, hai situacións nas que as dúas medias aumentan simultaneamente. Este é o fenómeno de Will Rogers.

* Un exemplo

Considérense os dous conxuntos

$$R = \{1, 2, 3, 4\}; \quad S = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

As súas medias son

$$\bar{R} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \text{e} \quad \bar{S} = \frac{35}{5} = 7.$$

Trasladamos o 5 dende S até R :

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad S = \{6, 7, 8, 9\}.$$

As novas medias resultan ser

$$\bar{R} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{e} \quad \bar{S} = \frac{30}{4} = 7,5.$$

As dúas medias aumentaron.

A idea matemática

Se as medias dos dous grupos melloran ao mesmo tempo... significa realmente que mellorou a situación de todos os seus integrantes?

A resposta é «non». Ás veces as estatísticas cambian simplemente porque cambian os grupos cos que se calculan, non porque os individuos melloren.

Comparar só as medias pode levar a conclusións enganosas se ao mesmo tempo cambia a composición dos grupos.

+ Para saber máis

Esta é unha enxeñosa frase que adoita atribuírse ao humorista Will Rogers (1879 – 1935), aínda que a súa autoría non está confirmada:

«Cando un habitante de Oklahoma se traslada a California, a intelixencia media de ambos os estados aumenta.»



! A explicación

O segredo está en que o valor trasladado ocupa posicións distintas en cada grupo:

- no grupo de orixe era inferior á media, polo que ao retiralo a media sobe;
- no grupo de destino é superior á media, polo que ao incorporalo tamén fai aumentar a media.

En realidade, non é necesario que o dato trasladado sexa o menor dun grupo e o maior do outro. Basta con que estea **comprendido entre as medias dos dous grupos**.



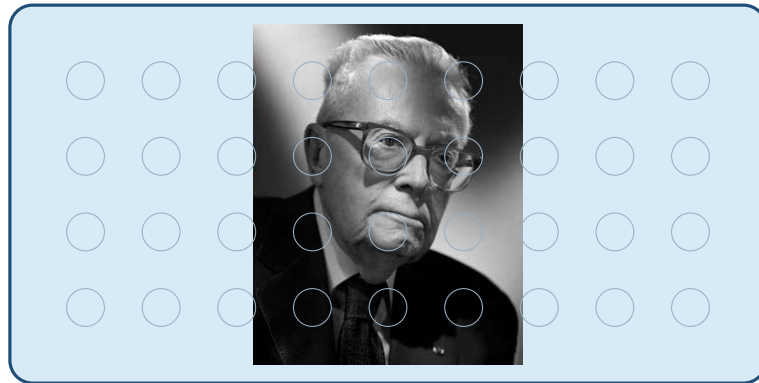
Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: <https://loc.gov/pictures/resource/cph.3a21749/>

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Allais



? O paradoxo

Sempre decidimos de forma racional?

Imaxina que tes que elixir entre dúas loterías moi semellantes, con distintas probabilidades e distintos riscos.

As túas dúas decisións serán coherentes entre si?

* Ponte a proba

Opción 1A 100 % → 1 000 000 € Premio seguro Non existe ningún risco	Opción 1B 89 % → 1 000 000 € 10 % → 5 000 000 € 1 % → 0 € Maior premio Existe un pequeno risco
Opción 2A 11 % → 1 000 000 € 89 % → 0 € Menor risco Premio máis modesto	Opción 2B 10 % → 5 000 000 € 90 % → 0 € Maior premio Maior risco de non gañar

Antes de continuar, elixe: 1A ou 1B? 2A ou 2B?

! A explicación

Se a túa prioridade é **evitar o risco**, a decisión coherente sería escoller **1A e 2A**: é menor a probabilidade de non gañar ningún premio.

Se, en cambio, prefires **maximizar o beneficio esperado**, a elección coherente sería **1B e 2B**: ofrecen un retorno esperado maior.

Porén, numerosos experimentos mostraron que a **resposta máis frecuente é 1A e 2B**: primeiro prefírese a seguridade absoluta e despois acéptase un risco maior para aspirar ao premio máis alto.

A idea matemática

A teoría da decisión supón que eliximos a opción con **maior utilidade esperada**: a máis vantaxosa tendo en conta tanto os premios como as súas probabilidades.

Na práctica, non sempre actuamos así. **A presenza dunha opción completamente segura ten un efecto psicolóxico moi intenso** e pode facernos cambiar de criterio cando desaparece esa certeza, aínda que as diferenzas entre as alternativas sexan pequenas.

+ Para saber máis

Retorno esperado en cada opción:

1A	→	1 000 000 €
1B	→	1 390 000 €
2A	→	110 000 €
2B	→	500 000 €

O economista francés **Maurice Allais** (1911 – 2010) presentou este paradoxo en **1953**, cuestionando unha das teorías máis aceptadas sobre a toma de decisións. Anos máis tarde, as ideas de Allais inspiraron os traballos de **Daniel Kahneman** (1934 – 2024) e **Amos Tversky** (1937 – 1996), que demostraron experimentalmente que **as persoas non valoramos as probabilidades de forma totalmente racional**.

Estes estudos deron lugar á **teoría das perspectivas** (*prospect theory*), un dos piares da economía do comportamento, pola que Kahneman recibiu o Premio Nobel de Economía en 2002.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

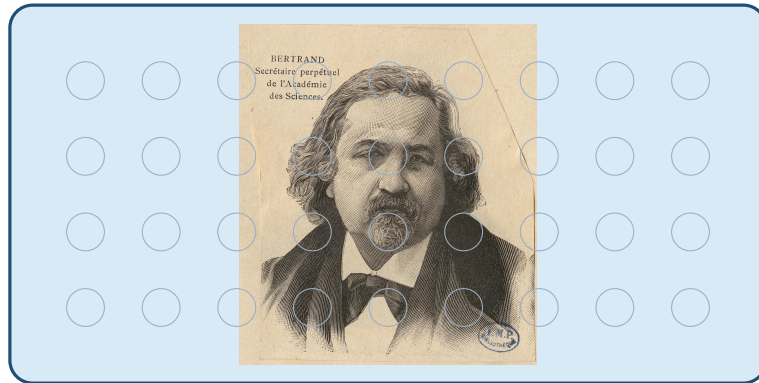
Imaxe superior: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ALLAIS_PN_Maurice-24x30-2001b.jpg

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Bertrand



? O paradoxo

Pode unha mesma pregunta ter tres respostas correctas?

Considérase unha circunferencia cun triángulo equilátero inscrito. Escóllese unha corda ao azar. Cal é a **probabilidade de que a corda sexa máis longa ca un lado do triángulo**?

Sorprendentemente, é posible obter **tres resultados distintos**: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. Como é posible?

! A explicación

Ningún dos tres razoamentos contén un erro. O problema está na propia pregunta: dicir que unha corda se escolle “ao azar” non determina un único procedemento para obtela.

Cada método produce unha distribución diferente das cordas, polo que a probabilidade cambia.

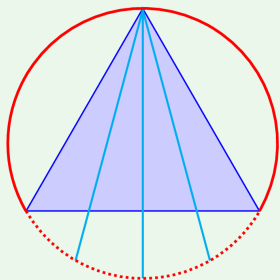
En realidade, **cada resposta resolve un problema distinto**, aínda que o enunciado pareza o mesmo.

* Tres métodos

Método A

Fíxase un extremo da corda e logo escóllese ao azar o outro extremo.

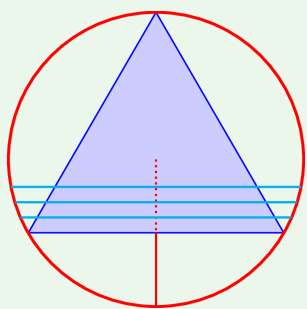
Resultado: $\frac{1}{3}$



Método B

Escóllese un punto ao azar nun raio perpendicular a un lado, e trázase por el a corda perpendicular.

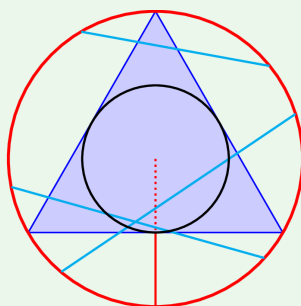
Resultado: $\frac{1}{2}$



Método C

Unha corda é máis longa que o lado do triángulo se o seu punto medio cae dentro dun círculo inscrito dentro do triángulo. Ese punto medio é o que se elixe ao azar.

Resultado: $\frac{1}{4}$



A idea matemática

O verdadeiro paradoxo non está nas tres respostas, senón na pregunta. **Non existe o azar sen especificar como se produce.**

Dicir que unha corda se escolle “ao azar” non basta para definir un problema de probabilidade. Antes de calcular unha probabilidade hai que describir con precisión o mecanismo aleatorio.

+ Para saber máis

Joseph Bertrand (1822 –1900) formulou este paradoxo en **1888**.

Durante décadas discutíronse numerosas solucións diferentes. En 1973 o físico **Edwin Jaynes** (1922 – 1998) propuxo resolver o problema esixindo que o procedemento aleatorio respectase determinadas simetrías xeométricas (rotacións, translacións e cambios de escala), obtendo así a probabilidade $\frac{1}{2}$.

Os tres procedementos parecen igualmente razoables...
Cal cres que é o correcto?



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bertrand_CIPA0115.jpg

Ilustracións inferiores elaboradas con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Condorcet



? O paradoxo

Pode haber varios ganadores nunha mesma elección sen cambiar un só voto?

Parece imposible, pero si. Cando hai tres ou máis candidaturas, o resultado dunha elección pode depender do método empregado para contar os votos. É dicir, os votantes elixen exactamente o mesmo... e, con todo, o ganador cambia.

A idea matemática

Nas eleccións con varias candidaturas non existe un sistema perfecto de escolla.

Dependendo das regras empregadas –maioría simple, segunda volta, comparación por parellas ou outros métodos– a candidatura vencedora pode ser diferente aínda que os votos emitidos sexan exactamente os mesmos.

Por iso, **o método de votación debe establecerse sempre antes de celebrar a elección.**

* Ponte a proba

Tres amizades deben escoller o restaurante onde ir cear.

Persoa	1. ^a opción	2. ^a opción	3. ^a opción
A	Italiano	Mexicano	Xaponés
B	Mexicano	Xaponés	Italiano
C	Xaponés	Italiano	Mexicano

Quen debería gañar?

+ Para saber máis

En **2009**, na cidade de **Burlington** (Vermont, EUA), tres das cinco candidaturas podían reclamar lexitimamente a vitoria dependendo do método utilizado para contar os votos. **O vencedor oficial foi Bob Kiss pero, sen cambiar os votos, tanto Kurt Wright como Andy Montroll podían argumentar que eran a opción preferida.**

Unha análise desas eleccións resulta especialmente reveladora do paradoxo de Condorcet: tres métodos de escrutinio, tres criterios perfectamente defendibles, tres ganadores diferentes.

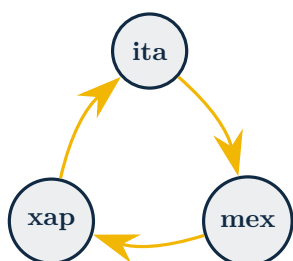
! A explicación

Non hai unha resposta evidente. Segundo o sistema de votación empregado, o resultado pode ser distinto.

O paradoxo de Condorcet aparece cando **as preferencias individuais son coherentes, pero as preferencias colectivas deixan de selo.**

Por dúas a unha en cada caso,

- a maioría prefere o restaurante italiano ao mexicano,
- a maioría prefere o restaurante mexicano ao xaponés e
- a maioría prefere o restaurante xaponés ao italiano.



As preferencias colectivas forman un ciclo e nestas condicións non existe un ganador indiscutible.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe superior: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Urna_electoral.jpg

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Ellsberg



? O paradoxo

Tomas sempre as decisións máis racionais?

Imaxina unha urna con 90 bólas.

- 30 son vermellas.
- Das outras 60, unhas son negras e outras amarelas, pero non sabemos cantas hai de cada cor.

Vas ter que tomar dúas decisións. A maioría das persoas elixe unha combinación que parece razoable... pero que agocha unha contradición.

* O dilema

Primeira elección. Escolle unha das dúas opcións:

- VERMELLA → gañas se sae unha bóla vermella.
- NEGRA → gañas se sae unha bóla negra.

Segunda elección. Agora escolle unha destas:

- NON VERMELLA → gañas se sae negra ou amarela.
- NON NEGRA → gañas se sae vermella ou amarela.

Anota mentalmente as túas dúas eleccións antes de continuar.

! A explicación

A maioría das persoas escolle:

- VERMELLA, porque sabe que hai 30 desa cor.
- NON VERMELLA, por ese mesmo motivo.

Pero estas eleccións son **contraditorias**.

A bóla amarela conta como favorable nas dúas apostas (NON VERMELLA e NON NEGRA), co cal, non inflúe. A verdadeira diferenza entre elas está en escoller entre a bóla vermella e a negra.

En realidade, ao preferir NON VERMELLA apóstase indirectamente pola bóla negra, xusto o contrario de cando se escolle VERMELLA.

A nosa intuición cambia segundo a información dispoñible e, en situacións deste tipo, tendemos a evitar a incerteza.

A idea matemática

O paradoxo de Ellsberg amosa que **non tratamos igual o risco e a incerteza**.

Un risco é unha situación na que coñecemos as probabilidades; é analizable numericamente. Unha incerteza é unha situación na que nin sequera coñecemos esas probabilidades; cae máis aló da análise matemática formal.

A maioría das persoas prefere asumir un risco coñecido antes ca enfrontarse a unha incerteza.

As nosas decisións non sempre son tan racionais como pensamos.

+ Para saber máis

Daniel Ellsberg (n. 1931) publicou os resultados deste experimento en **1961**, mentres investigaba como tomamos decisións en situacións de información incompleta. Hoxe considérase un resultado clásico da **teoría da decisión** e da **economía do comportamento**.

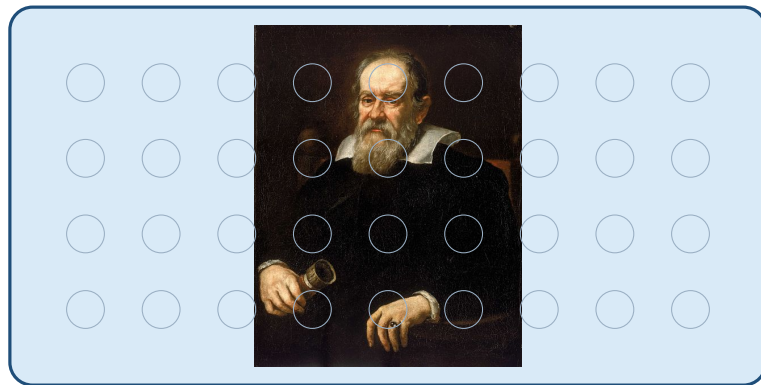
O paradoxo axuda a explicar por que ás veces tememos máis os riscos pouco coñecidos –como unha enfermidade nova ou unha tecnoloxía emerxente– ca outros perigos moito mellor cuantificados, aínda que estes últimos sexan obxectivamente máis nocivos.



PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Galileo



? O paradoxo

Hai máis números naturais ca cadrados perfectos?

Á primeira vista, a resposta parece evidente.

Os cadrados perfectos

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

forman só unha parte dos números naturais

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Polo tanto, parece evidente que debe haber menos cadrados perfectos ca números naturais.

Pero **a intuición engánanos**.

* A correspondencia

Observa esta correspondencia:

1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	...

Cada número natural ten asociado un único cadrado perfecto.

E cada cadrado perfecto procede dun único número natural.

Sobra algún número natural? Falta algún cadrado perfecto?

! A explicación

Aquí revélase unha aparente contradición.

Por unha banda, os cadrados perfectos son só unha parte dos números naturais.

Por outra, é posible emparellar cada número natural cun cadrado perfecto, sen que sobre ningún elemento en ningún dos dous conxuntos.

Nos conxuntos finitos isto sería imposible.

Nos conxuntos infinitos, en cambio, pode ocorrer.

A idea matemática

O paradoxo de Galileo amosa que **a intuición deixa de funcionar cando traballamos co infinito**.

En realidade, un conxunto infinito pode ter o mesmo número de elementos ca unha das súas partes.

Esta observación abriu o camiño ao desenvolvemento da teoría moderna dos conxuntos.

+ Para saber máis

Galileo Galilei (1564 – 1642) publicou este paradoxo en **1638**. A súa conclusión foi que conceptos como «maior», «menor» ou «igual» non podían aplicarse aos conxuntos infinitos do mesmo xeito que aos conxuntos finitos.

Dous séculos máis tarde, **Georg Cantor** (1845 – 1918) resolveu esta aparente contradición ao desenvolver unha teoría rigorosa do infinito. Grazas a ela sabemos que existen infinitos do mesmo tamaño... e tamén infinitos máis grandes ca outros.

O infinito, por sorprendente que pareza, tamén admite distintos tamaños.



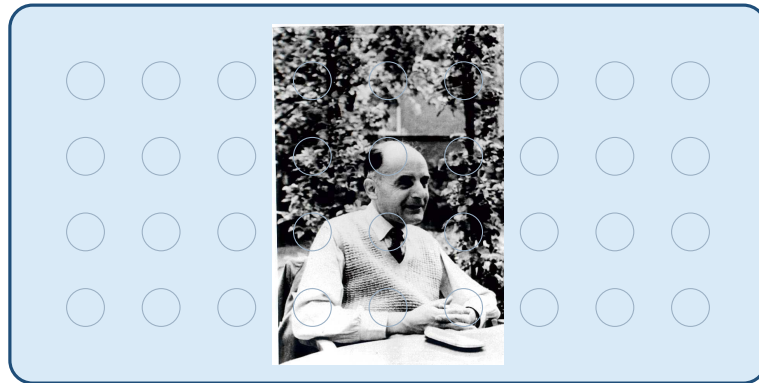
Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei,_1636.jpg

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Grelling e Nelson



* As definicións

Un adxectivo é **autolóxico** se se describe a si mesmo. Por exemplo

- **galega** é unha palabra galega e
- **esdrúxula** é unha palabra esdrúxula.

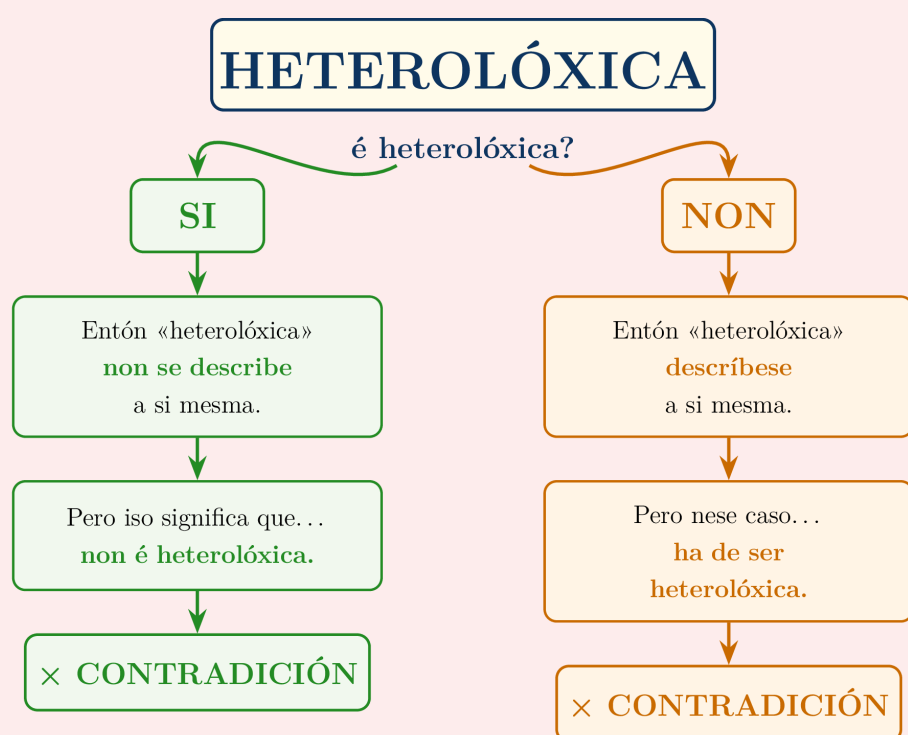
Un adxectivo é **heterolóxico** se non se describe a si mesmo. Por exemplo

- **monosilábica** non é unha palabra monosilábica e
- **longa** non é unha palabra longa.

A idea matemática

Paradoxos coma este puxeron de manifesto que certas definicións aparentemente inocentes podían conducir a contradicións, ameazaron no seu día os alicerces das matemáticas e motivaron que matemáticos e lóxicos tiveron que desenvolver teorías moito máis rigorosas para conseguir fundamentar unha teoría de conxuntos consistente. Durante as primeiras décadas do século XX, desenvolveuse un intenso traballo na procura de sistemas matemáticos máis rigorosos, como a **axiomática de Zermelo–Fraenkel**, determinadas construcións paradoxais na teoría de conxuntos.

? O paradoxo



+ Para saber máis

O paradoxo foi formulado en 1908 polos filósofos **Kurt Grelling** (1886 – 1942) e **Leonard Nelson** (1882 – 1927).

Comparte a mesma estrutura lóxica que o **paradoxo do mentireiro** («esta frase é falsa»), o **paradoxo do barbeiro** ou o **paradoxo de Bertrand Russell** (1872 – 1970) sobre os conxuntos. Todos eles amosan que a linguaxe e a lóxica poden producir contradicións cando unha afirmación se aplica a si mesma.

Estes paradoxos tiveron unha enorme influencia no desenvolvemento da lóxica matemática moderna e na creación de sistemas axiomáticos capaces de evitar este tipo de situacións.

! A explicación

O problema xorde porque a palabra fai referencia a si mesma. Ao intentar clasificala como autolóxica ou heterolóxica, segundo as definicións anteriores, cada resposta obriga a aceptar inmediatamente a contraria.

É un exemplo clásico de **autorreferencia**, unha das principais fontes de paradoxos en lóxica.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

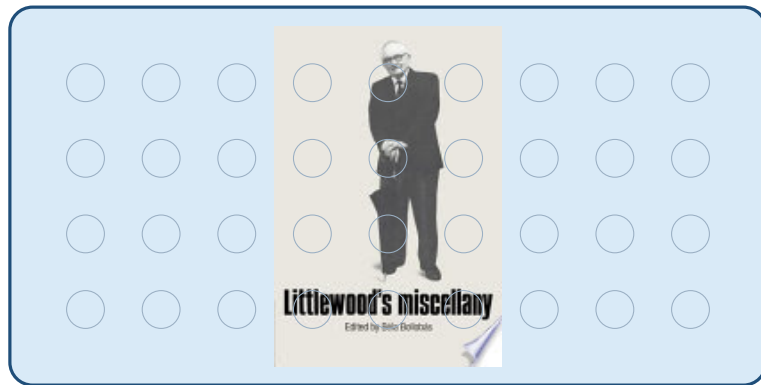
Imaxe superior: <https://alchetron.com/Kurt-Grelling>

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Littlewood



? O paradoxo

Pode unha caixa quedar baleira despois de enche-la infinitas veces?

Á primeira vista, parece imposible.

Con todo, existe un experimento matemático no que unha caixa recibe infinitas bólas e, cando todo remata, aparece completamente baleira.

Como é posible?

* Ponte a proba

- Un minuto antes do mediodía introducimos na caixa as bólas do 1 ao 10 e retiramos a número 1.
- Medio minuto antes do mediodía introducimos as bólas do 11 ao 20 e retiramos a número 2.
- Un terzo de minuto antes do mediodía introducimos as bólas do 21 ao 30 e retiramos a número 3.

O proceso continúa indefinidamente, repetindo sempre a mesma operación e en tempos cada vez máis pequenos.

Que cres que habrá dentro da caixa cando o reloxo marque exactamente as 12:00?

! A explicación

Considera unha bóla calquera, por exemplo a 100. Entrou na caixa, pero foi retirada no paso número 100.

Exactamente o mesmo ocorre coa bóla 2500, coa bóla 1 000 000 ou con calquera outra. **Todas as bólas teñen asignado un momento no que abandonan definitivamente a caixa.**

11:59:00	+1 ... 10	-1
11:59:30	+11 ... 20	-2
11:59:40	+21 ... 30	-3
⋮		
12:00:00	?	

Por iso, **ao mediodía non queda ningunha bóla no seu interior.**

A idea matemática

O paradoxo de Littlewood amosa que **o infinito non sempre obedece ás regras da nosa intuición.**

En cada paso a caixa gaña nove bólas. Con todo, ao mediodía non permanece ningunha delas no seu interior. A razón é que non existe ningunha bóla que permaneza dentro para sempre.

Este tipo de procesos reciben o nome de **supertarefas**: un número infinito de accións realizadas nun tempo finito.

+ Para saber máis

Este paradoxo foi formulado polo matemático **John Edensor Littlewood** (1885 – 1977) no seu libro *A Mathematician's Miscellany* (1953).

É un dos paradoxos clásicos do infinito e segue xerando debate sobre como interpretar matematicamente os procesos infinitos.

Como escribiu o poeta **Mario Benedetti** (1920 – 2009):

«*Dun tempo a esta parte, o infinito encolleu perigosamente.*»



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: <https://books.google.es/books?id=MjVgeT7Laf8C>

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Protágoras



? O paradoxo

Debe pagar o alumno?

O filósofo Protágoras aceptou ensinar Dereito a un alumno sen recursos.

Como pagamento acordaron o seguinte:

«Pagarás as leccións o día que gañes o teu primeiro xuízo.»

Unha vez rematada a formación, o alumno non conseguía ningún cliente... e Protágoras decidiu levalo aos tribunais por impago. Mentres, o alumno aseguraba que non estaba obrigado a pagar.

Quen ten razón?

* Ponte a proba

Protágoras razoa así:

- Se gaño o xuízo, o tribunal obrigará ao alumno a pagar.
- Se o perdo, será o primeiro xuízo que gañe o alumno e, segundo o noso acordo, tamén terá que pagar.

Pola súa parte, **o alumno razoa así:**

- Se gaño o xuízo, o tribunal dirá que non debo pagar.
- Se o perdo, significa que aínda non gañei ningún xuízo e, segundo o noso acordo, tampouco terei que pagar.

Con quen estás de acordo?

! A explicación

Os dous argumentos parecen correctos.

Protágoras e o seu alumno utilizan un mesmo feito –a sentenza– para chegar a conclusións contrarias, interpretándoa cada un ao seu favor.

Non existe unha única resolución universalmente aceptada do conflito, debido á **natureza ambigua da situación**, e é precisamente aí onde reside o paradoxo. Dende un punto de vista moral, pode argumentarse que ambos teñen razón, ou que ningún dos dous a ten.

O conflito non ten unha solución lóxica evidente.

A idea matemática

O paradoxo de Protágoras amosa que un razoamento pode parecer impecable e, con todo, conducir a conclusións incompatibles.

A causa está na forma de interpretar as condicións do acordo.

En lóxica e en dereito, pequenas diferenzas na redacción dun contrato poden cambiar completamente as consecuencias.



+ Para saber máis

Protágoras (485 a.C. – 411 a.C.) foi un experto en retórica e legounos este paradoxo que, **tras máis de 2400 anos**, segue utilizándose en cursos de **lóxica, filosofía e dereito**.

Ao longo da historia propuxéronse moitas solucións, pero ningunha conseguiu pechar definitivamente o debate.

Existen diversas posibilidades: que o alumno contrate un avogado, que a sentenza invalide o acordo orixinal etc.

E aínda queda unha última pregunta: **que ocorrería se o xuízo fose declarado nulo?**



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe superior: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:JMR-Memphis1.jpg>

Imaxe inferior xerada con IA.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de San Petersburgo



? O paradoxo

Canto pagarías por participar neste xogo?

Lánzase unha moeda até que aparece cruz por primeira vez. Se a cruz aparece

- na 1.^a tirada, gañas 2 €;
- na 2.^a tirada, 4 €;
- na 3.^a tirada, 8 €;
- na 4.^a tirada, 16 €;

e así sucesivamente: cada vez que hai unha tirada máis, o premio duplícase.

Cal sería o prezo xusto para participar?

A idea matemática

O paradoxo de San Petersburgo amosa que non sempre tomamos decisións baseándonos unicamente no valor esperado.

Ao decidir se un risco compensa ou non, tamén **inflúen varios factores** como:

- a nosa situación económica,
- a percepción do risco ou
- a utilidade que nos proporciona cada cantidade de diñeiro.

* Ponte a proba

A probabilidade de gañar cada premio é:

premio	2 €	4 €	8 €	16 €	...
probabilidade	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...

Entón... tes que decidir antes de xogar. A cantidade apostada pola que te decantes debería ter relación co que esperes que poderías gañar.

Aceptarías pagar 100 €? E 1000 €? E 100 000 €?

+ Para saber máis

O paradoxo foi proposto en 1713 por **Nicolás Bernoulli** (1687 – 1759) e estudado poucos anos despois polo seu parente **Daniel Bernoulli** (1700 – 1792), quen publicou a súa solución en 1738 nas Actas da Academia de Ciencias de San Petersburgo, cidade da que tomou o nome.

Daniel Bernoulli propuxo que **as persoas non maximizan o diñeiro esperado, senón a utilidade esperada**: unha mesma cantidade de diñeiro non ten o mesmo valor para todo o mundo.

Esta idea de Daniel Bernoulli foi o punto de partida da moderna **teoría da utilidade**, empregada hoxe en economía, finanzas, psicoloxía e teoría da decisión.

! A explicación

A contradición aparece porque **o valor esperado non coincide sempre co valor que unha persoa lle dá ao diñeiro**.

Gañar 1000 € non supón o mesmo para quen apenas ten aforros ca para unha persoa millonaria.

O valor esperado é:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + \dots \\ = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots,$$

é dicir, **o premio esperado é infinito**.

Segundo este cálculo, debería compensar pagar calquera cantidade, por elevada que fose.

Porén, practicamente ninguén aceptaría apostar miles ou millóns de euros para participar.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Portr%C3%A4t_des_Daniel_Bernoulli_-_edit1.jpg

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo de Simpson



? O paradoxo

Como é posible que un xogador sexa mellor na primeira metade, tamén na segunda... e, con todo, resulte peor no partido completo?

Á primeira vista parece imposible. Se un xogador obtén unha porcentaxe de acerto superior nas dúas metades dun partido, agardariamos que tamén tivese unha mellor porcentaxe global. Porén, non sempre ocorre así.

* Ponte a proba

Esta táboa recolle o rendemento de dous xogadores nun partido de balonmán.

Xogador	1. ^a metade	2. ^a metade	Total
A	1/5	6/8	7/13
B	2/8	4/5	6/13

Antes de continuar, intenta responder:

- Quen foi mellor na primeira metade?
- Quen foi mellor na segunda metade?
- Quen tivo a mellor eficacia no total do partido?

A resposta vaite sorprenderte.

! A explicación

- 1.^a metade $\rightarrow$ 25 % de acerto para B; 20 % para A.
- 2.^a metade $\rightarrow$ 80 % de acerto para B; 75 % para A.
- Total $\rightarrow \frac{7}{13} > \frac{6}{13} \rightarrow$ maior acerto de A.

A aparente contradición débese a que as dúas metades non teñen o mesmo peso. **O mellor resultado de A prodúcese precisamente na metade na que realiza máis lanzamentos**, polo que inflúe máis no cálculo final.

A idea matemática

O paradoxo de Simpson aparece cando unha tendencia observada en varios grupos desaparece ou muda ao combinar todos os datos.

A causa adoita ser a existencia dunha variable oculta — neste caso, o diferente número de lanzamentos en cada metade — que modifica o peso de cada grupo no resultado final.

Por iso, antes de comparar porcentaxes ou medias, é imprescindible comprobar se todos os grupos teñen a mesma importancia estatística.

+ Para saber máis

O paradoxo de Simpson obsérvase en situacións reais tan diversas como

- a admisión de estudantes na Universidade de Berkeley,
- estudos sobre tratamentos médicos,
- análises de mortalidade ou
- estatísticas deportivas.

En todos estes casos, unha análise superficial dos datos pode levar a conclusións completamente equivocadas.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vicentealamo.jpg>

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

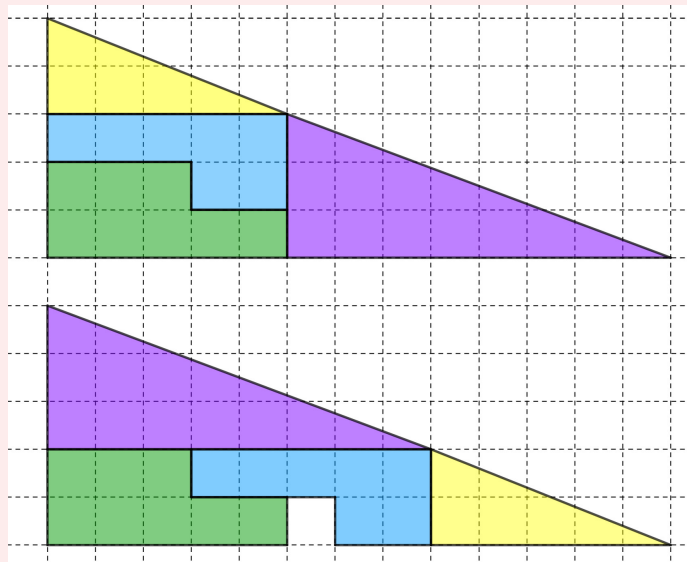
O paradoxo do cadrado desaparecido



? O paradoxo

Onde foi parar o cadrado desaparecido?

Con catro pezas formamos un triángulo rectángulo. Se re-colocamos esas mesmas pezas, aparece unha nova figura: en aparencia é a mesma... pero cun cadrado baleiro.



As pezas son as mesmas. De onde sae o burato?

* Os cálculos

Basta contar “cadradiños”.

O triángulo ten base 13 e altura 5. A área é $\frac{13 \cdot 5}{2} = 32,5$.

A suma da área das catro pezas é $12 + 5 + 7 + 8 = 32$.

Algo non cadra.

! A explicación

A clave está na suposta hipotenusa.

O que parece unha única liña recta non o é: está formada por **dous segmentos con inclinacións lixeiramente distintas**. As pendentes dos triángulos pequenos son

$$\frac{3}{8} = 0,375 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5} = 0,4.$$

Como as pendentes son distintas, os dous segmentos non están aliñados. Por tanto, a figura inicial non é un triángulo: é un **cuadrilátero**, case imperceptible á vista.

A idea matemática

O paradoxo do cadrado desaparecido non crea nin destrúe área.

As pezas conservan sempre a mesma superficie. O que cambia é a forma global na que se colocan.

A diferenza entre as dúas falsas hipotenusas reparte unha pequena cantidade de área ao longo de toda a figura. Nunha disposición esa diferenza queda disimulada; na outra aparece concentrada como un cadrado baleiro.

A intuición visual falla porque damos por feito que unha liña case recta é realmente recta.

+ Para saber máis

Este paradoxo foi popularizado por **Martin Gardner** (1914 – 2010), un dos grandes divulgadores da matemática recreativa, quen atribuíu a súa invención ao mago afeccionado **Paul Curry** (1917 – 1986).

Aplicando un pouco de trigonometría pode calcularse a diferenza entre os ángulos respectivos de ambos os triángulos pequenos: un mide aproximadamente $1^\circ 15'$ máis que o outro.

Misterio resolto: ningún cadrado desaparece. Todo é consecuencia dun **efecto óptico**.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

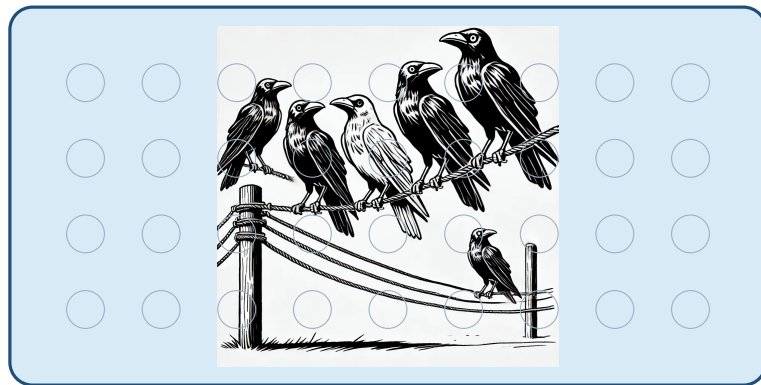
Imaxe: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Martin_Gardner.jpeg

Ilustración inferior elaborada con GeoGebra.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo do corvo



? O paradoxo

Pode unha vaca confirmar que todos os corvos son negros?

Observamos moitos corvos. Todos son negros. Entón:

Todos os corvos son negros.

Pero agora pensa nesta outra afirmación, que dende o punto de vista da lóxica é equivalente á anterior:

Todo o que non é negro non é un corvo.

Se atopamos unha vaca lila, un coche azul ou unha mazá verde, comprobamos que non son negros e tamén que non son corvos.

Significa iso que tamén confirman que todos os corvos son negros?

A idea matemática

O paradoxo do corvo amosa que **non todas as evidencias teñen o mesmo valor**.

En xeral, observar un corvo negro parece proporcionar un apoio moito máis directo á hipótese ca observar unha vaca lila ou un coche azul.

A razón é que o conxunto dos obxectos que non son negros nin corvos é inmensamente maior ca o conxunto dos corvos.

Así, unha vaca lila pode contar formalmente como evidencia favorable, pero a súa contribución é ínfima.

O paradoxo obríganos a distinguir entre que unha observación sexa compatible cunha hipótese e que constitúa unha confirmación relevante.

+ Para saber máis

O paradoxo foi formulado en **1945** polo filósofo da ciencia **Carl Gustav Hempel** (1905 – 1997), nun traballo sobre a confirmación das hipóteses científicas.

A discusión continúa aberta hoxe en filosofía da ciencia, estatística e epistemoloxía, porque obriga a preguntarse **que significa realmente que unha observación confirme unha teoría**.

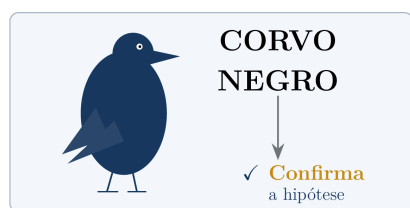
A referencia á vaca lila débese, por suposto, á coñecida imaxe publicitaria dos chocolates Milka.

* Ponte a proba

Cal destas observacións cres que achega información sobre a hipótese «todos os corvos son negros»?

- Un corvo negro.
- Unha vaca lila.
- Un coche azul.
- Un plátano amarelo.

! A explicación



A EQUIVALENCIA LÓXICA

TODOS OS CORVOS
↓
SON NEGROS



TODO O QUE NON É NEGRO
↓
NON É UN CORVO



A **lóxica** di que ambas as afirmacións son **equivalentes**.

A **intuición** dínos que non deberían achegar o mesmo tipo de evidencia.



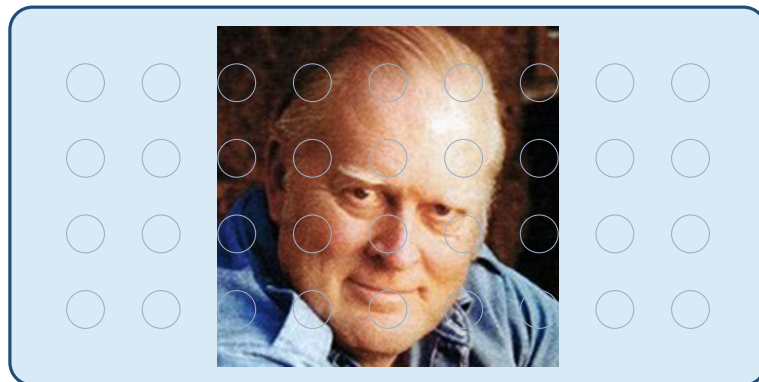
Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe superior xerada con IA. Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo do día da semana inesperado



? O paradoxo

Pode anunciarse unha sorpresa... sen deixar de ser unha sorpresa?

Un luns pola mañá anúnciase o seguinte:

«Esta semana celebrarase un exercicio de defensa civil. Terá lugar un día da semana, pero non se anunciará até pouco antes de comezar.»

Todo o mundo sabe que ocorrerá esa semana.

O único que se descoñece é o día.

Parece un anuncio razoable... ou non?

! A explicación

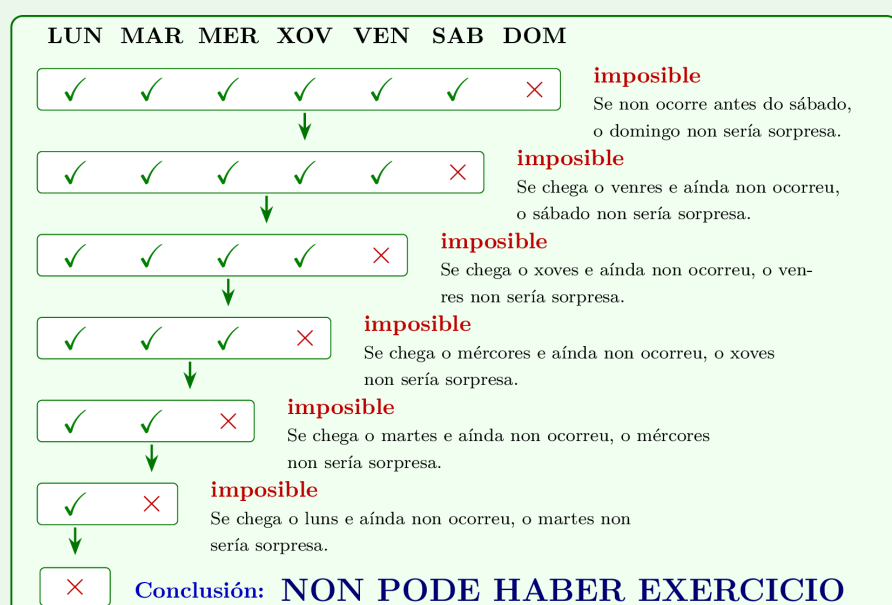
Unha posible explicación é que o razoamento cara atrás non pode manterse até o final.

Ao concluír que o exercicio é imposible, desaparece a certeza na que se apoiaba o primeiro descarte (que o exercicio se vai celebrar). Se o exercicio se celebra o mércores, pode volver resultar inesperado.

O paradoxo nace porque **o concepto de 'sorpresa' depende do que as persoas cren saber en cada momento**; as expectativas cambian como consecuencia do propio razoamento.

* O razoamento

Os habitantes comezan a pensar. Aplican un razoamento sucesivo, día a día, comezando polo último día posible: o domingo.



🔔 🔔 **MÉRCORES** 🔔 🔔

O EXERCICIO CELEBROUSE

Todo o mundo quedou sorprendido.

A idea matemática

Razoar sobre aquilo que sabemos pode cambiar precisamente o que chegamos a saber.

Conceptos aparentemente sinxelos como 'saber', 'esperar' ou 'sorpresa' resultan moito máis difíciles de definir con precisión do que parece.

Por iso este paradoxo **segue sendo obxecto de debate entre lóxicos, filósofos e matemáticos**.

+ Para saber máis

Durante a **Segunda Guerra Mundial**, a **radio sueca** anunciou un exercicio de defensa civil que tería lugar un día inesperado da semana. A historia popularizouse a partir de **1951** grazas ao filósofo **Michael Scriven** (1928 – 2023), aínda que hoxe se atribúe a súa formulación inicial ao sueco **Lennart Ekbom**.

O paradoxo ten **outras versións**, como o paradoxo do exame sorpresa ou o do aforcamento inesperado.

Como pode ser? O razoamento parecía impecable e, con todo, a realidade contradíu. Onde está o erro?



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

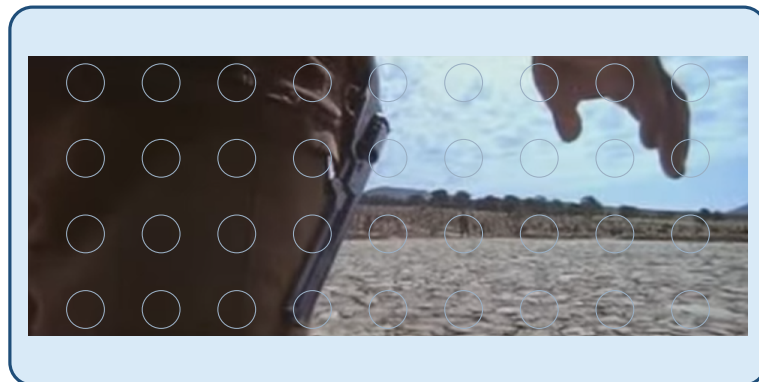
Imaxe: <https://research.cgu.edu/cec-ny/people/michael-scriven/>

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo do truelo



? O paradoxo

Pode ser mellor... non acertar o tiro?

Tres tiradores enfróntanse nun truelo. Cada un deles dispón tan só dun disparo, na orde A, B, C.

- A acerta 1 de cada 3 disparos.
- B acerta 2 de cada 3 disparos.
- C acerta todos os disparos.

A dispara primeiro. A quen debería apuntar para ter máis posibilidades de sobrevivir?

A idea matemática

A intuición adoita identificar acertar con tomar a mellor decisión.

Pero en **teoría de xogos** o importante non é gañar unha acción illada, senón **maximizar a probabilidade de éxito ao final** de todo o proceso.

Neste caso, a mellor estratexia non consiste en acertar o disparo, senón en **provocar que os dous rivais máis perigosos se enfronten entre si**.

+ Para saber máis

As probabilidades de supervivencia de A son

$\frac{5}{9}$ tirando a B, $\frac{6}{9}$ tirando a C e $\frac{5}{6}$ tirando ao aire.

É dicir, a estratexia aparentemente máis absurda é, en realidade, a mellor de todas.

Un truelo é como un duelo, pero con tres pistoleiros.

O máis famoso do cine pode verse ao final da película *O bon, o feo e o malo*: <https://youtu.be/svR5dCIAIag>.

* Ponte a proba

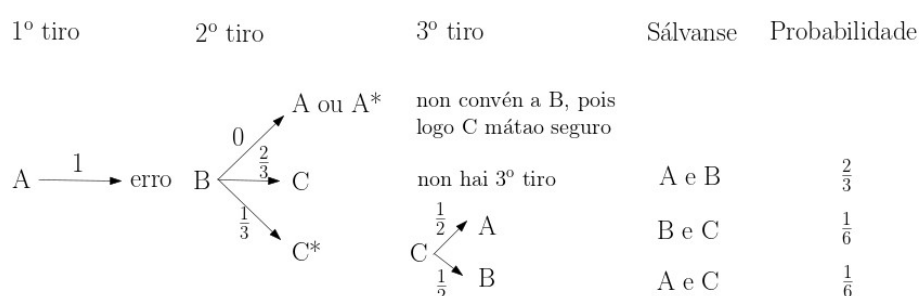
Antes de continuar, **escolle unha opción para A**.

- ⚡ Disparar a B, porque é un rival perigoso.
- ⚡ Disparar a C, porque é o mellor tirador.
- ⚡ Disparar ao aire.

Cal cres que maximiza as posibilidades de sobrevivir de A?

! A explicación

A intuición leva a pensar que A debería intentar eliminar ao rival máis perigoso, pero non é a mellor estratexia. Por contra, **se A fallase deliberadamente**, B e C seguirían vivos e o máis probable sería que B disparase contra C, porque é o rival máis forte.



Isto fai que, sorprendentemente, errar o primeiro disparo aumente a probabilidade de sobrevivir.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe: <https://youtu.be/svR5dCIAIag?si=dN4q9aikSKLhIJAV&t=199>

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.

PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

O paradoxo dos números interesantes



? O paradoxo

Existen números aburridos?

Hai números moi coñecidos, como π (3,14159...), o de teléfono de emerxencias en toda Europa (112) ou o que dá resposta ao sentido da vida, o universo e todo o demais (42). Outros, en cambio, parecen non ter nada de especial.

Pero... e se todos os números fosen interesantes?

Pode parecer unha afirmación absurda. Con todo, existe un razoamento que parece demostralo.

* O razoamento

Supoñamos que si existen números naturais sen ningún interese.

Como os números naturais están ordenados e teñen un mínimo, **haberá un número aburrido máis pequeno ca todos os demais.**

Pero ese número xa ten unha propiedade extraordinaria:

é o número aburrido máis pequeno.

Pero iso convérteo automaticamente nun número interesante. Chegamos así a unha **contradición**. Por tanto,

todos os números naturais son interesantes.

! A explicación

A demostración parece impecable, pero agocha un problema fundamental.

A propiedade «ser interesante» non é un concepto matemático ben definido.

O interese dun número depende da persoa, do contexto ou mesmo do momento histórico.

Por iso, non é posible dividir rigorosamente os números en «interesantes» e «non interesantes», e a demostración perde a súa validez.

A idea matemática

As demostracións por **redución ao absurdo** son unha das ferramentas máis poderosas das matemáticas.

Pero só funcionan cando todos os conceptos utilizados están definidos con absoluta precisión.

Se empregamos unha propiedade ambigua, podemos obter conclusións aparentemente correctas... pero falsas.

+ Para saber máis

Cando **G. H. Hardy** (1877 – 1947) visitou no hospital a **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920), comentou que chegara nun taxi coa matrícula 1729, e parecíalle moi aburrida. Ramanujan respondeu inmediatamente:

«En absoluto. É o menor número que pode escribirse como suma de dous cubos positivos de dous xeitos distintos.»

1729

$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Dende entón, o **1729** é coñecido como o **número de Hardy–Ramanujan**.



PARADOXOS

as matemáticas que desafían a intuición

Un paradoxo no Quijote



? O paradoxo

Pode alguén dicir a verdade e mentir ao mesmo tempo?

Nunha ponte hai unha lei moi estrita:

- quen diga a verdade pode cruzar,
- quen minta será aforcado.

Un día chega un home e declara:

« *Veño para morrer nesta forca.* »

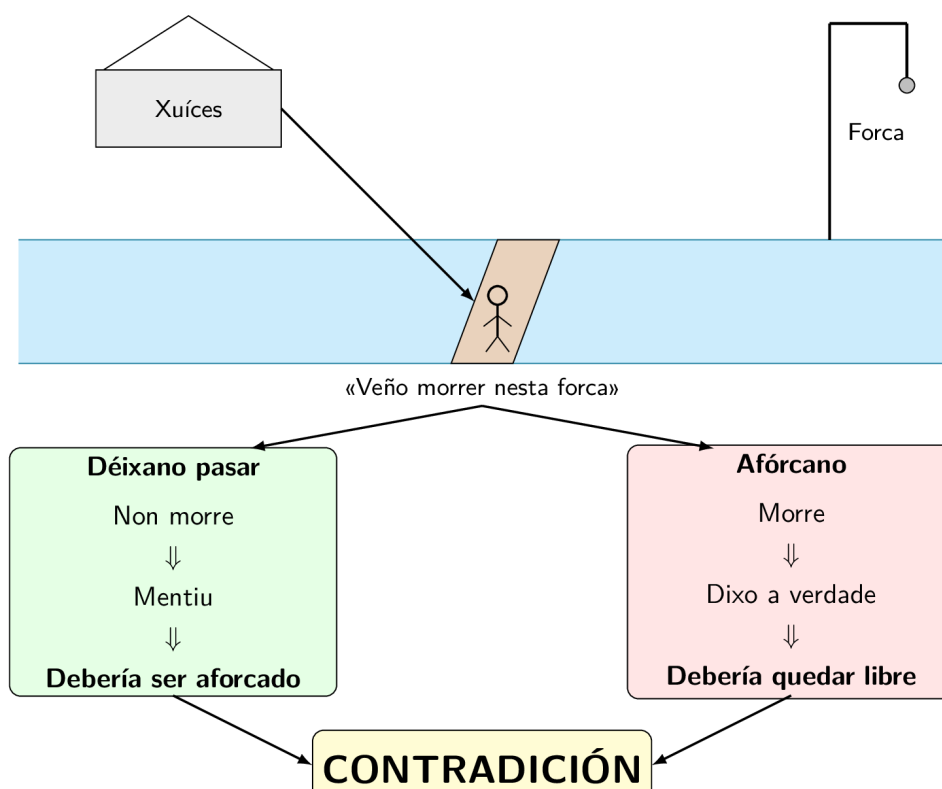
Os xuíces quedan desconcertados. **Que deberían facer?**

* Ponte a proba

Ti es un dos xuíces. Que decidirías?

- Deixalo pasar.
- Aforcalo.
- Buscar outra solución.

! A explicación



A idea matemática

O problema aparece porque a afirmación do viaxeiro fala das consecuencias da propia decisión dos xuíces.

Este é un paradoxo **autorreferencial**: a afirmación fala indirectamente das consecuencias que terá ela mesma. A autorreferencia aparece tamén noutros paradoxos como o do mentireiro, o de Protágoras ou o de Grelling–Nelson. Estes exemplos mostran que unha regra aparentemente clara pode provocar unha contradición cando se aplica a enunciados que dependen da súa propia verdade ou falsidade.

+ Para saber máis

O paradoxo aparece na *Segunda parte del ingenioso caballero don Quijote de la Mancha*, publicada por **Miguel de Cervantes** en **1615**, cando **Sancho Panza** exerce como gobernador da Ínsula Barataria.

Sancho conclúe que existen tantas razóns para condenar o viaxeiro como para absolvelo e decide deixalo pasar. Segue así o consello de Don Quijote de inclinarse pola misericordia cando a xustiza estivese en dúbida.

A súa decisión non elimina a contradición lóxica, pero resolve o conflito desde un punto de vista humano e moral.



Elaborado por Paulo González Ogando · IES Johan Carballeira (Bueu)

Imaxe superior: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sancho_Panza_en_la_%C3%8Dnsula_Barataria.jpg

Ilustración inferior elaborada con LaTeX.